# Kolokwium z **analizy matematycznej II.2**

27 kwietnia 2023,
14:20 – 17:20

Rozwiązanie każdego zadania **należy** umieścić na **osobnej kartce**, wyraźnie podpisanej (drukowanymi literami) imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia udowodnione na wykładzie lub ćwiczeniach.

Zadania są równo punktowane. Aby uzyskać maksymalny wynik z kolokwium wystarczy oddać cztery w pełni poprawnie rozwiązane zadania.

---

**Zadanie 1.** Uzasadnić, że zbiór

$$M = \{(te^{\alpha}\cos\alpha, te^{\alpha}\sin\alpha, t) \mid \alpha \in \big(0, \ln(2\sqrt{2})\big),\ t \in (1,2)\}.$$

jest rozmaitością. Wyznaczyć miarę powierzchniową $l_M(M)$ (pole powierzchni $M$).

---

**Zadanie 2.** Wyznaczyć $n$ wymiarową miarę Lebesgue'a obszaru

$$\{\mathbf{x} \in (0,\infty)^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

---

**Zadanie 3.** Niech $g_n(x,y) = n^2 e^{-n^2(x^2+y^2)}$ i niech $f$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^2$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty}\big(f * g_n(x,y)\big)$.

---

**Zadanie 4.** Gęstość kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ w dowolnym jej punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od początku układu współrzędnych. Znaleźć środek ciężkości tej kuli w zależności do $R$.

**Uwaga:** środek ciężkości zbioru mierzalnego $B \subset \mathbb{R}^n$ o zadanej (mierzalnej) gęstości $\rho$, to środek ciężkości tego zbioru względem miary $\mu$ takiej, że $d\mu = \rho d\lambda_n$.

---

**Zadanie 5.** Załóżmy, że $A$ jest borelowskim podzbiorem $\mathbb{R}^2$, a ponadto $\lambda_2(A) = \pi$. Udowodnić, że

$$\int_A \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\lambda_2(x,y) \geqslant \frac{\pi}{2}.$$

---